Fourier Transformation

Fourierreihe

Satz von Jean Baptiste Joseph Baron de Fourier (1768-1830) in: Théorie analytique de la chaleur, Paris 1822:

Durch einfache Summierung einer Konstanten und von Cosinus- und Sinus-Schwingungen lässt sich jede beliebige periodische Funktion `f(x)` beliebig genau annähern.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k * \cos\left(k * x * \frac{2\pi}{T}\right) + b_k * \sin\left(k * x * \frac{2\pi}{T}\right)$$

Diese Summe nennt man Fourierreihe. Die Darstellung einer beliebigen periodischen Funktion in Form dieser Reihe nennt man Fourierzerlegung oder harmonische Analyse.
Um Schreibarbeit in den Punkten (1) bis (4) zu sparen, stauchen/dehnen wir die x-Achse willkürlich so, dass `T` immer exakt gleich `2*Pi` ist.
Die Summanden der Fourierreihe ergeben sich dann so:
(1) Man fängt an mit einer Konstanten, nämlich der Hälfte des Mittelwertes von `f(x) = a0/2`.
(2) Nehmen wir an, die periodische Funktion habe die Periode `T`, dann muss man zur Konstanten je eine Cosinus- und Sinus-Schwingungen addieren, die beide ebenfalls die Periode `T` haben (Grundschwingung) mit den noch unbekannten Amplituden `a1` für den Cosinus und `b1` für den Sinus:
`f(x) = a0/2 +a1*cos(x) + b1*sin(x)`.
(3) Danach addiert man je einen Cosinus und Sinus mit halber Periode `=T/2` und den (noch unbekannten) Amplituden `a2` und `b2`:
`f(x) = a0/2 +a1*cos(x) + b1*sin(x) + a2*cos(2*x) + b2*sin(2*x)`.
(4) dann je einen weiteren mit Periode `=T/3` und den (noch unbekannten) Amplituden `a3` und `b3` und so weiter mit Perioden, die ganzzahlig immer weiter geteilt sind `T/4`, `T/5` usw.
In der Formel tauchen die Teiler von `T` in Form des Faktors `k` auf: `x*2*Pi / (T/k) = k*x*2*Pi/T`, weil Teilung von `T` durch `k` gleichbedeutend mit Erhöhung der Frequenz um den Faktor `k` ist.
`k` dient in der Formel nicht nur als Frequenzvervielfacher sondern gleichzeitig als Zählindex der gesamten Summation und als Numerierungsindex der unbekannten Amplitudenwerte.
siehe auch: http://de.wikipedia.org/wiki/Fourier-Transformation

Resonatoren

Fourier, der Physiker war, wurde zu diesem Satz durch physikalische Experimente inspiriert.
Beispiel 1: Es ist kein Problem, beliebig schräge und schrille Geräusche mit Saiteninstrumenten hervorzubringen, obwohl deren Saiten nur und ausschließlich harmonisch schwingen können. Ein Gemisch reiner Frequenzen ergibt in der Regel eine unreine Dissonanz (und nur selten einen Klang).
Fouriers intuitiver Umkehrschluß, dass nämlich jedwedes unreine Ergebnis als Summation reiner Schwingungskomponenten aufgefasst werden kann, hat sich als richtig und außerordentlich fruchtbar erwiesen.
Beispiel 2: In der Gehörschnecke = Cochlea des Innenohres befindet sich ein fluid-mechanisches System mit definiert geordneten Resonatorpunkten. Sensorzellen (Haarzellen mit bewegungsempfindlichen Zellfortsätzen = Zilien) messen dort die Auslenkung der Resonatormembran. Verzögerungsfrei synchron mit dieser Auslenkung ändert sich das Zellwandpotential der Haarzellen ähnlich wie die Ausgangsspannung eines Mikrophons und die Haarzelle schüttet Neurotransmitter in den Extrazellulärraum aus. Dieser triggert die Auslösung von Nervenimpulsen in exakt einer Faser des Hörnerven. Eine Faser des Hörnerven transportiert somit Information über die aktuelle Amplitude genau einer einzigen charakteristischen Frequenz.

Beispiel 3: Ein Schwingkreis aus Spule und Kondensator hat eine bestimmte Resonanzfrequenz. Er "erkennt" in jedem Frequenzgemisch das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein seiner eigenen Frequenz und gerät in Resonanz = Mitschwingung, falls seine Eigenfrequenz vorhanden ist. Man darf sich dieses "Erkennen" nicht als aktiven Prozess vorstellen, sondern man sollte ihn als zwanghaftes "in Resonanz geraten" denken.
Diese Resonanz von Schwingkreisen ist die Grundlage der elektrischen Tontechnik. Man exponiert eine wohlgeordnete Reihe von Schwingkreisen einem beliebigen Signal und verstärkt die Resonanzantworten soweit diese überhaupt vorhanden sind. Diese Antwortsignale mischt man wieder und das Ergebnis ist ein verstärktes Signal, das selbstverständlich nur aus denjenigen reinen Frequenzen zusammengesetzt ist, für die Resonatoren vorhanden waren.
Die erstaunliche Erfahrung ist, dass man mit relativ wenig Resonatoren beliebige Schwingungen realitätsnah verstärken kann.
Beispiel 4: Pendel sind strikt monofrequent. Will man einem Pendel größere Amplitude oder einem Kind auf einer Schaukel größeren Spaß verschaffen, dann muss die Energie in Resonanz mit der Pendelbewegung zugeführt werden. Es ist unmöglich, aufschaukelnde Bewegungsenergie kontinuierlich oder in einer anderen als der Pendelfrequenz zuzuführen.
Zusammenfassung: Fouriertransformation bedeutet die Zerlegung beliebiger periodischer Schwingungen in eine endliche oder unendliche Summe frequenzreiner Schwingungen durch frequenzreine Resonatoren und die Umkehrung des Vorgangs, nämlich der Rekonstruktion beliebiger periodischer Signale durch Addition harmonischer Resonatorschwingungen.
Zu diesem Zweck benötigt man mathematische "Resonatoren", die in Analogie zu einem Schwingkreis feststellen können, ob eine bestimmte Frequenz in einem Gemisch vorhanden ist und wenn ja in welchem Verhältnis sie zum Gesamtsignal des Gemischs beiträgt.
Zwecks Schreibvereinfachung stauchen/dehnen wir wieder `T` auf die Länge `2*Pi`.
Joseph Fouriers geniale Idee ist folgende:
(1) Er multipliziert das Originalsignal mit den reinen Resonatorsignalen `cos(k*x)` und `sin(k*x)`. Er erhält für jedes `k` zwei Produktsignale `f(x)*cos(k*x)` und `f(x)*sin((k*x)` mit folgenden Eigenschaften: Die Produktfunktionen haben immer positive und negative Werte, auch dann, wenn das Originalsignal nur positiv oder nur negativ war. Die Produktfunktionen sind hoch positiv dort, wo Berg auf Berg und wo Tal auf Tal trifft (=Fall 1) und hoch negativ dort wo Berg auf Tal trifft (=Fall 2).
Tritt in `f(x)*cos(k*x)` Fall 1 ungefähr gleich oft auf wie Fall 2, dann haben `f(x)` und `cos(k*x)` nichts gemeinsam.
Tritt in `f(x)*sin(k*x)` Fall 1 ungefähr gleich oft auf wie Fall 2, dann haben `f(x)` und `sin(k*x)` nichts gemeinsam.
Tritt in `f(x)*cos(k*x)` Fall 1 viel öfter auf als Fall 2 oder Fall 2 viel öfter als Fall 1 , dann haben `f(x)` und `cos(k*x)` die Frequenz `k` gemeinsam.
Tritt in `f(x)*sin(k*x)` Fall 1 viel öfter auf als Fall 2 oder Fall 2 viel öfter als Fall 1 , dann haben `f(x)` und `sin(k*x)` die Frequenz `k` gemeinsam.

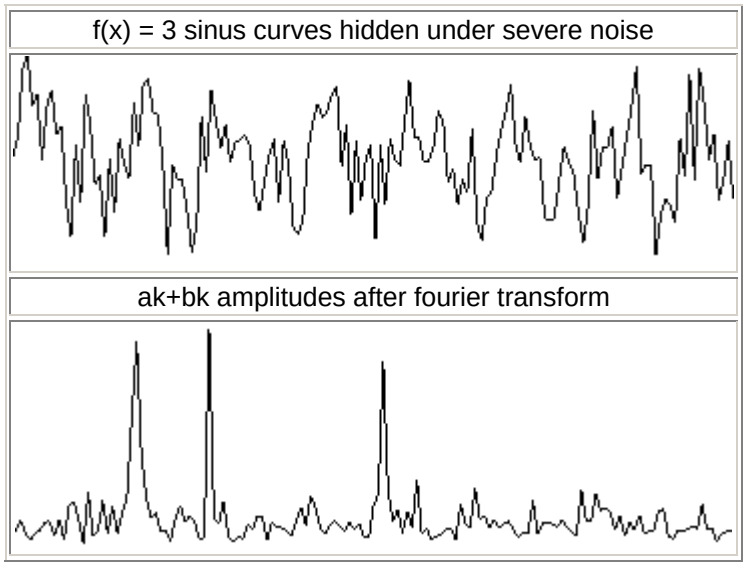
(2) Ausgehend von diesen Überlegungen benutzt Fourier die von den Produktfunktionen eingeschlossenen Flächen als Resonatoren: Diese Flächen werden berechnet durch die Integrale über `f(x)*cos(k*x)*dx` entlang einer Periode `T`.

Teilt man die Flächen = Integrale durch `T`, dann erhält man die normierten Resonanzantworten, die sogenannten Fourierkoeffizienten, nämlich 2 Antworten `ak` und `bk` pro untersuchter Resonanzfrequenz `k`:

$$a(k) = \frac{1}{T} * \int_{x=T0}^{x=T0+T} f(x) * \cos\left(k * x * \frac{2\pi}{T}\right) * dx$$

$$b(k) = \frac{1}{T} * \int_{x=T0}^{x=T0+T} f(x) * \sin\left(k * x * \frac{2\pi}{T}\right) * dx$$

Example



Warum Cosinus und Sinus ?

Warum benötigt Fourier zwei Resonatoren (Cosinus und Sinus) pro Frequenz ? Warum genügt nicht einer von beiden ?
Antwort: Trifft in der Produktfunktion ein Berg von `f(x)` auf einen Nulldurchgang von `cos(k*x)`, dann wird der Berg in eine positive und in eine negative Hälfte geteilt die sich auch dann zu Null summieren, wenn `f(x)` und `cos(k*x)` gleichfrequent sind. Fourier braucht für diesen Fall einen Zwillings-Resonator gleicher Frequenz, der um 90 Grad phasenverschoben ist. Dieser gleichfrequente Bruderresonator schwingt, weil er in Phase mit dem Signal ist.
Physikalische Resonatoren wie die Schwingkreise in Beispiel 2 benötigen das nicht. Ohne Erregung befinden sie sich in Ruhe, sie schwingen nicht selbstständig, sie geraten erst langsam in Resonanz und schwingen sich ein in Phase mit ihrer Erregerfrequenz.
Die Fourierresonatoren schwingen aber immer und selbstständig, sie sind unfähig, sich auf eine fremde Phasenlage einzustellen.
Sie haben den Charakter von immer vorhandenen Testsignalen, die mit Erregerwellen Produkte und Produktintegrale bilden und man braucht (mindestens) zwei um 90 Grad phasenverschobene Testsignale um sicher zu gehen, dass eines davon in Phase mit `f(x)` ist.
Wir werden weiter unten sehen, dass wenn man `f(x)` in eine definiere Phasenlage zwingen kann, tatsächlich ein Fourierresonator genügt (i.a. Cosinus).
Fourier konstruiert aus der Grundfrequenz `2*Pi/T` für jedes ganzzahlige Frequenzvielfache je 2 Resonatoren und probiert die Resonatoren schlicht alle aus. Die Probe besteht jeweils aus Multiplikation von Resonator und Signal und Integration des Multiplikationsergebnisses. Wenn sich in den Integralen positive und negative Flächen zu Null kompensieren, dann ist das jeweilige Testergebnis negativ, andernfalls positiv. Das Vorgehen von Fourier ist keinesweg elegant, sondern brute force Büffeltaktik. Der Rechenaufwand ist exorbitant und nur von Maschinen zu leisten.

Physikalische und mathematische Sprechweisen

In vorherigen Absätzen haben wir in der Tradition des 19. Jahrhunderts Begriffe aus Mathematik und Physik parallel und synonym benutzt.
Die physikalische Sprechweise ist bei weitem einfacher und intuitiver, die mathematische ist abstrakter aber deshalb breiter verwendbar.
Man sollte beide analoge Begriffswelten beherrschen und zweckmäßig anwenden.

Analogie der harmonischen Zusammensetzung = harmonische Synthese:
Physik: Superposition = Man kann jede beliebige Schwingung durch Superposition reiner Schwingungen zusammensetzen.
Mathematik: Summation = Man kann jede beliebige periodische Funktion durch addieren von Cosinus- und Sinusfunktionen beliebig genau approximieren.

Analogie der Ganzzahligkeit:
Physik: Jede beliebige Schwingung läßt sich zusammensetzen aus einer Grundschwingung und ganzzahligen Frequenzvielfachen davon = Oberwellen.
Beispiel: Eine zwischen zwei Fixpunkten eingespannte Geigensaite kann nur in ganzzahligen Vielfachen ihrer Grundfrequenz schwingen, weil an den Einspannpunkten keine Auslenkung möglich ist.
Jedes noch so schräge oder schrille Geräusch der Saite kann also nur aus der Grundfrequenz und ganzzahligen Vielfachen davon bestehen.
Man kann unmöglich das Geräusch durch nichtganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz (etwa 2,2- oder 7,5-fache) zusammensetzen, weil solche Schwingungen die Saite aus dem hinteren Einspannpunkt reißen müßten.
Mathematik: Jede beliebige periodische Funktion `f(x)` ist ein Punkt im orthogonalen normierten Vektorraum, der durch die orthogonalen Basisvektoren `cos(k)` und `sin(k)` aufgespannt wird.

Analogie der harmonischen Zerlegung = harmonische Analyse:
Physik: Jede Schwingung lässt sich durch Resonatoren in ihre Bestandteile zerlegen. Man benötigt exakt so viele Resonatoren wie reine Schwingungen vorhanden sind und diese Resonatoren müssen schmalbandig exakt in ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz resonanzfähig sein.
Mathematik: Die Fouriertransformation ist die Faltung = Convolution von `f[x]` mit `cosinus(k*arg)` und `sinus(k*arg)` für jedes ganzzahlige Vielfache von `arg` und liefert die orthogonalen Koordinaten a_k und b_k.

diverse weitere Analogien:

physikalische Sprechweise	mathematische Sprechweise
Zeit `t`	unabhängige Variable x
Auslenkung(`t`), Schalldruck(`t`), Feldstärke(`t`)	Funktionswert `y = f(x)`
Schwingungsdauer der Grundwelle `T`	Periode `L = 2*Pi/T`
Oberwellen der Wellenlängen `T/2, T/3, T/4` etc.	Reskalierung durch Multiplikation der Periode mit `2, 3, 4` etc.
Resonator für die `k`-te Oberwelle	Basisvektoren `cos(k*L)` und `sin(k*L)`
Resonanzantwort am `k`-ten Resonator	Faltung = Convolution der `cos` und `sin` mit `f(x)` ergeben `ak` und `bk`
Ruhelage	Nulllinie, Mittelwert, `a0/2`
Amplitude der Grundwelle	Wurzel aus `(a1*a1 + b1*b1)`
Amplitude der `k`-ten Oberwelle	Wurzel aus `(ak*ak + bk*bk)`

Diskrete Fouriertransformation DFT

Die häufigste Speicherform von Funktionen in Computern sind diskrete äquidistante Daten in Form eindimensionaler Arrays (z.B. Fieberkurven, Börsenkurse, Pixel in Zeilen und Spalten).
Es hat sich herausgestellt, dass so gut wie alle solche Daten Wellenform d.h. Periodizität haben und dass die Fouriertransformation ideal geeignet ist, unerwünschte Wellen aus den Daten zu entfernen mit dem Ziel der Redundanzvernichtung und Kompression. An so etwas hat Joseph Fourier nie auch nur im Traum gedacht, aber heute ist dies die bei weitem wichtigste Anwendung seiner harmonischen Analyse.
Die Überführung der Rechenvorschriften Fouriers für `ak` und `bk` auf diskrete Daten ist einfach:
Liegt das Signal `f(x)` vor in Form eines Arrays der Länge `N`, dann übernimmt `N` die Rolle der Periodendauer `T`.
Jeder Resonator nimmt nun auch die Form eines Arrays der Länge `N` an.
Summen von `0` bis `N-1` ersetzen die Integrale von T_o bis T_o+`T`.

$$a(k) = \frac{1}{N} * \sum_{x=0}^{x=N-1} f(x) * \cos\left(k * x * \frac{2\pi}{N}\right)$$

$$b(k) = \frac{1}{N} * \sum_{x=0}^{x=N-1} f(x) * \sin\left(k * x * \frac{2\pi}{N}\right)$$

Da wir N Cosinus- und N Sinus- Resonatoren brauchen, legen wir die Resonatoren zweckmäßig in Form von 2 quadratischen N*N-Matrizen an.
Produktbildung und Summierung geschehen nunmehr in Form einer vektoriellen Multiplikation von f(x) mit allen Zeilen beider Matrizen.
Die ak und bk ergeben sich als die N + N Skalarprodukte: f(x) jeweils vektoriell multipliziert mit einer Matrixzeile dividiert durch N.
Der Rechenaufwand an Gleitkommaoperationen ist hoch:
N*N Berechnungen von Cosinus plus N*N Berechnungen von Sinus plus 2*N*N Multiplikationen plus 2*N*N Additionen plus 2*N Divisionen.

Beispiel einer Fourierzerlegung eines Signals mit N=4

f(x) = (1. 0. 2. 1.)

$$\cos\left(k*x*\frac{2*Pi}{4}\right) = \begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 1. & 0. & -1. & 0. \\ 1. & -1. & 1. & -1. \\ 1. & 0. & -1. & 0. \end{bmatrix}$$

$$\sin\left(k*x*\frac{2*Pi}{4}\right) = \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 1. & 0. & -1. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & -1. & 0. & 1. \end{bmatrix}$$

a_0 = f(x) * cosine row no. 0 = (1*1 +0*1 +2*1 +1*1)/4 = 1.
a_1 = f(x) * cosine row no. 1 = (1*1 +0*0 -2*1 +1*0)/4 = -0.25
a_2 = f(x) * cosine row no. 2 = (1*1 -0*1 +2*1 -1*1)/4 = 0.5
a_3 = f(x) * cosine row no. 3 = (1*1 +0*0 -2*1 +1*0)/4 = -0.25
b_0 = f(x) *   sine row no. 0 = (1*0 +0*0 +2*0 +1*0)/4 = 0.
b_1 = f(x) *   sine row no. 1 = (1*0 +0*1 +2*0 -1*1)/4 = -0.25
b_2 = f(x) *   sine row no. 2 = (1*0 +0*0 +2*0 +1*0)/4 = 0.
b_3 = f(x) *   sine row no. 3 = (1*0 -0*1 +2*0 +1*1)/4 = 0.25

C# Programm für dieses N=4 Beispiel

```
using System;
using System.Drawing;
using System.Windows.Forms;
using System.Text;

public class Form1 : Form
{ public static void Main() { Application.Run( new Form1() ); }
  const int N = 4;
  float[] f0 = { 1f, 0f, 2f, 1f }, f1  = new float[N];
  float[,] cos = new float[N,N]  , sin = new float[N,N];
  float[]  a   = new float[N]    , b   = new float[N];
  StringBuilder sb = new StringBuilder();
  public Form1()
  { Text = "Prof. Miszalok's Fourier sample with N=4";
    Width = 320; Height = 400;
    int x, k;
    for ( k=0; k < N; k++ ) //prepare resonators
      for ( x=0; x < N; x++ )
      { cos[k,x] = Convert.ToSingle( Math.Cos( k*x*Math.PI/2.0 ) ) ;
        sin[k,x] = Convert.ToSingle( Math.Sin( k*x*Math.PI/2.0 ) ) ;
      }
    for ( k=0; k < N; k++ ) //Fourier transform
    { for ( x=0; x < N; x++ )
      { a[k] += f0[x] * cos[k,x]; //convolution
        b[k] += f0[x] * sin[k,x]; //convolution
      }
      a[k] /= N; b[k] /= N; //normalisation
    }
    for ( k=0; k < N; k++ ) //back transform
      for ( x=0; x < N; x++ ) { f1[x] += a[k]*cos[k,x] + b[k]*sin[k,x]; }
```

```
    //compose output string
    sb.Append ("f0:\r\n");
    for ( x=0; x < N; x++ )   sb.Append( String.Format( "{0,5:F0}", f0[x]) );
    sb.Append( "\r\ncos:\r\n" );
    for ( k=0; k < N; k++ )
    { for ( x=0; x < N; x++ ) sb.Append( String.Format( "{0,5:F0}", cos[k,x]) );
      sb.Append( "\r\n" );
    }
    sb.Append( "sin:\r\n" );
    for ( k=0; k < N; k++ )
    { for ( x=0; x < N; x++ ) sb.Append( String.Format( "{0,5:F0}", sin[k,x]) );
      sb.Append( "\r\n" );
    }
    sb.Append( "a:\r\n" );
    for ( k=0; k < N; k++ )   sb.Append( String.Format( "{0,9:F2}", a[k] ) + "\r\n" );
    sb.Append( "b:\r\n" );
    for ( k=0; k < N; k++ )   sb.Append( String.Format( "{0,9:F2}", b[k] ) + "\r\n" );
    sb.Append( "f1:\r\n" );
    for ( x=0; x < N; x++ )   sb.Append( String.Format( "{0,5:F0}", f1[x]) );
    sb.Append( "\r\n" );
  }
  protected override void OnPaint( PaintEventArgs e )
  {  e.Graphics.DrawString( sb.ToString(), Font, new SolidBrush( Color.Red ), 0, 0 ); }
}
```

Optimiertes DFT Programm

The following C#-program
1) fills an array `f0` with 3 frequencies,
2) computes the a_k and the b_k,
3) transforms them back into an array `f1`,
4) makes an output string and displays it,
5) reduces memory to 50% and computing time to 30% compared with the raw Fourier formula.
The program derives advantage from inherent Fourier symmetry and limits (without any loss of precision) the no.s of a_k and b_k to `N/2+1`. Reason: The original `f[x]` has `N` elements and when both the a_k and the b_k have `N` elements, there must be a redundancy of 50%. Indeed, the high numbered a_k and b_k with `k > N/2` mirror the low numbered with `k < N/2` in the following way:
1) when `N` is even: a_0,...,$a_{N/2}$, $a_{N/2-1}$, $a_{N/2-2}$,...,a_1. Sample `N=8`: a,b,c,d,e,d,c,b
2) when `N` is odd : a_0,...,$a_{N/2}$, $a_{N/2}$, $a_{N/2-1}$, $a_{N/2-2}$,...,a_1. Sample `N=9`: a,b,c,d,e,e,d,c,b
Conclusion: There is no need to compute more than `N/2+1` a_k and b_k. It follows that the `cos[,]` and `sin[,]` resonator matrices don't need to be quadratic: `N/2+1` rows (with `N` columns each) are sufficient.
There is another interesting symmetry inside the remaining resonator matrices: The upper right half is identical to the lower left half with diagonal symmetry because `cos(k*x*arcus)` is identical with `cos(x*k*arcus)` and same with `sin(...)`. Therefore it's possible to compute the upper right corner and to mirror the values to down left.
Further accelerations:
1) We set the first row and column of `cos(k*x*arcus)` always to `1f` and of `sin(k*x*arcus)` always to `0f` without any computation.
2) We set a_0 always to the average of `f[x]` and b_0 always to `0f` without any convolution.
The disadvantages of these accelerations are:
1) The code is more complex than before.
2) The normalisation becomes tricky compared to the Fourier formula: We have to double all a_k and b_k except a_0,b_0 and $a_{N/2}$,$b_{N/2}$.
Summary: An optimized Fourier transform can be surprisingly fast. In cases with `N < 1000` there is no need to use any Fast Fourier Transform FFT with its multiple restrictions and inaccuracies.

```
using System;
using System.Drawing;
using System.Windows.Forms;
using System.Text;
public class Form1 : Form
{ public static void Main() { Application.Run( new Form1() ); }
  const int N = 16;
  float[]  f0  = new float[N]      , f1  = new float[N];      //input, output
  float[,] cos = new float[N/2+1,N], sin = new float[N/2+1,N];//resonators
  float[]  a   = new float[N/2+1]  , b   = new float[N/2+1];  //Fourier coefficients
  StringBuilder sb = new StringBuilder();                     //one string takes all
  public Form1()
  { Text = "Prof. Miszalok's Fourier sample with N=16";
    Width = 500; Height = 600;
    int x, k;
    double arcus = 2*Math.PI/N, k_arcus, x_k_arcus;
    for ( x=0; x < N; x++ ) //input = mixture of 3 frequencies, just for fun
    { f0[x]  = (float)Math.Cos(     x * arcus );
      f0[x] += (float)Math.Sin( 3 * x * arcus );
      f0[x] += (float)Math.Cos( 6 * x * arcus + Math.PI/4 );
    }
```

```
    //prepare resonators
    for ( x=0; x <   N;  x++ ) { cos[0,x] = 1f; sin[0,x] = 0f; } //row no. 0
    for ( k=0; k <= N/2; k++ ) { cos[k,0] = 1f; sin[k,0] = 0f; } //column no. 0
    for ( k=1; k <= N/2; k++ ) //resonator rows 1 to N/2
    { k_arcus = k * arcus;
      for ( x=k; x < N; x++ )  //upper right triangle of cos[,] and sin[,]
      { x_k_arcus = x * k_arcus;
        cos[k,x] = Convert.ToSingle( Math.Cos( x_k_arcus ) ) ;
        sin[k,x] = Convert.ToSingle( Math.Sin( x_k_arcus ) ) ;
        if ( x <= N/2 && k != x )  //mirror to lower left except diagonal
        { cos[x,k] = cos[k,x]; sin[x,k] = sin[k,x]; }
      }
    }
    for ( x=0; x < N; x ++ ) a[0] += f0[x]; a[0] /= N; b[0] = 0f;
    for ( k=1; k <= N/2; k++ ) //Fourier transform
    { for ( x=0; x < N; x++ )
      { a[k] += f0[x] * cos[k,x]; //convolution
        b[k] += f0[x] * sin[k,x]; //convolution
      }
      if ( k < N/2 ) { a[k] *= 2f/N; b[k] *= 2f/N; } //doubling and normalisation
      else           { a[k] /= N;    b[k] /= N;    } //normalisation
    }
    for ( k=0; k <= N/2; k++ ) //back transform
      for ( x=0; x < N; x++ ) { f1[x] += a[k]*cos[k,x] + b[k]*sin[k,x]; }
    //compose output string
    sb.Append ("f0:\r\n");
    for ( x=0; x < N; x++ )   sb.Append( String.Format( "{0,6:F1}", f0[x]) );
    sb.Append( "\r\ncos:\r\n" );
    for ( k=0; k <= N/2; k++ )
    { for ( x=0; x < N; x++ ) sb.Append( String.Format( "{0,6:F1}", cos[k,x]) );
      sb.Append( "\r\n" );
    }
    sb.Append( "sin:\r\n" );
    for ( k=0; k <= N/2; k++ )
    { for ( x=0; x < N; x++ ) sb.Append( String.Format( "{0,6:F1}", sin[k,x]) );
      sb.Append( "\r\n" );
    }
    sb.Append( "a:\r\n" );
    for ( k=0; k <=N/2; k++ ) sb.Append( String.Format( "{0,9:F2}", a[k] ) + "\r\n" );
    sb.Append( "b:\r\n" );
    for ( k=0; k <=N/2; k++ ) sb.Append( String.Format( "{0,9:F2}", b[k] ) + "\r\n" );
    sb.Append( "f1:\r\n" );
    for ( x=0; x < N; x++ )   sb.Append( String.Format( "{0,6:F1}", f1[x]) );
    sb.Append( "\r\n" );
  }
  protected override void OnPaint( PaintEventArgs e )
  { e.Graphics.DrawString( sb.ToString(), Font, new SolidBrush( Color.Red ), 0, 0 ); }
}
```

Experiments:
1. Try out the back transform with frequency cuts by replacing the upper limit `N/2` of the back transform loop successively by `0,1,2...` till `7` and observe how `f1[x]` comes closer to `f0[x]`.
2. Explain the positions and the signs of the values a_k `!= 0f` and b_k `!= 0f`.
3. Mix new and higher frequencies into `f0` by inserting new lines `f0[i] += (float)Math....( ... );` into the first `for`-loop of the program.
4. Mix 10% noise to `f0`:

```
Random r = new Random();
f0[i] += 0.1f * (float)( r.NextDouble()-0.5 );
```

and limit the back transform to `k <= 7`.
5. Increase `N` to `N > 20`;
6. You will find more programs dealing with Fourier transforms here:
   www.miszalok.de/C_CVCis/C6_FourierTransform = Analysis of contours in raster drawings
   www.miszalok.de/C_CVCis/C5_FourierRecognition = Learning Optical Character Recognition

Applet von Greg Slabaugh

Das folgende Demo-Programm wurde geschrieben von Greg Slabaugh, Georgia Tech, Atlanta 1998.

Fourier Demo Applet

Diskrete Cosinustransformation DCT

siehe englische Version dieser Vorlesung:

Fourier_english.htm#a8